



امتحان پایان ترم
کیهان شناسی ۱
زمان: ۳ ساعت

نیمسال دوم ۹۹-۱۳۹۸
۹۹/۴/۱۶

پس از نوشتن پاسخ‌ها برگه‌ی خود را اسکن کنید (یا از آن عکس بگیرید) و فایل (ها) را بارگذاری نمایید. با توجه به این که امتحان به صورت مجازی برگزار می‌شود، می‌توانید از کتاب‌های مرجع درس، جزوه، یا تمرین‌های حل‌شده‌ی خودتان استفاده کنید. همچنین استفاده از ماشین حساب و رایانه مجاز است، اما بدون دسترسی به اینترنت (موتورهای جستجو، صفحات وب، شبکه‌های اجتماعی و ...) مگر برای ارتباط با سامانه‌ی یادگیری دانشگاه یا ارتباط با استاد برای سؤال.

۱- با توجه به این که واکنش‌های هسته‌ای در انرژی MeV رخ می‌دهند، تخمینی از مرتبه‌ی بزرگی انتقال به سرخ در زمان هسته‌زایی [۱۰] ارائه دهید.

۲- نمودار عامل مقیاس کیهان $a(t)$ را از پیش از تورم تا به امروز به طور کیفی رسم کنید. سه نمودار دیگر را هم با همین پارامترها رسم کنید، با این تفاوت که:
(آ) افزایش $\Omega_{\Lambda,0}$ و کاهش $\Omega_{m,0}$ پیدا کند، اما مجموع‌شان تغییر نکند.
(ب) افزایش $\Omega_{r,0}$ و کاهش $\Omega_{m,0}$ پیدا کند، اما مجموع‌شان تغییر نکند.
(ج) پارامتر هابل در زمان تورم افزایش پیدا کند.

۳- وضعیت شعاع فیزیکی افق ذره و افق رویداد را در آینده‌ی کیهان بیان کنید؛ کاهش می‌یابند یا افزایش؟ [۲۰]

۴- مدل تورمی $V = \frac{1}{2}M^2(\phi_0^2 - \phi^2)$ را در نظر بگیرید که میدان تورمی از نقطه‌ای در نزدیکی بیشینه‌ی پتانسیل شروع به افتادن به راست می‌کند. [در واقع باید یک کمینه هم در سمت راست داشته باشیم تا پس از تورم میدان در آن جا متوقف شود. ولی برای سادگی در این مسأله آن کمینه را در نظر نمی‌گیریم].
(آ) مقدار ϕ را در انتهای تورم ($\epsilon = 1$) پیدا کنید. در سراسر مسأله از تقریب $1 \ll \phi$ (در یکاهای پلانک) استفاده کنید. تخمین مرتبه‌ی بزرگی کافی است.
(ب) مقدار ϕ را $10^{-6} e$ تا قبل از پایان تورم پیدا کنید.
(ج) پارامتر M را به گونه‌ای مشخص کنید که بهنجارش COBE ($A_s \approx 2 \times 10^{-9}$) برقرار باشد.

۵- ارتباط ساختارهای موجود در کیهان فعلی (کهکشان‌ها، خوشه‌ها، ابرخوشه‌ها) با دوران تورم را به اختصار توضیح دهید. [۱۰]

۶- ذرات گونه‌ی X در زمان t_{dec} از تعادل با فوتون‌ها (و بقیه‌ی ذرات حمام گرمایی که با فوتون‌ها در تعادلند) خارج، و در زمان t_{nr} غیرنسبیتی می‌شوند. این اتفاقات چه تأثیری روی دمای فوتون‌ها می‌گذارند؟ دو حالت $t_{\text{dec}} < t_{\text{nr}}$ و $t_{\text{dec}} > t_{\text{nr}}$ را جداگانه بررسی کنید.

۷- با استفاده از معادله‌ی ساها [۲۰]

$$\frac{1 - X_e}{X_e^2} = \frac{4\sqrt{2}\zeta(3)}{\sqrt{\pi}}\eta \left(\frac{T}{m_e}\right)^{3/2} e^{B/T}, \quad (1)$$

توضیح دهید اگر انرژی یونش هیدروژن کمی بزرگ‌تر از مقدار کنونی می‌بود، زمان بازترکیب چه تغییری می‌کرد. اگر $\Omega_{b,0}$ بزرگ‌تر می‌بود چطور؟

روابط مورد نیاز

۱. واحدهای پلانک: $M_p = (\Lambda\pi G)^{-1/2} = \hbar = c = k_B = 1$. نشانگان متریک: $-++$.

۲. متریک FLRW:

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2 [d\chi^2 + S_k(\chi)^2 d\Omega^2], \quad S_k(\chi) = \begin{cases} \sin \chi & k = 1 \text{ (بسته)}, \\ \chi & k = 0 \text{ (تخت)}, \\ \sinh \chi & k = -1 \text{ (باز)}. \end{cases} \quad (1)$$

۳. زمان همدیس: $d\tau = \frac{dt}{a}$. انتقال به سرخ: $1+z = \frac{a_0}{a}$. پارامتر هابل: $1+z = \frac{a_0}{a}$. پارامتر کندشوندگی: $h \approx 0.7$, $H = 100 h \frac{\text{km}}{\text{s-Mpc}}$. $q = -\ddot{a}/H^2 a$.

۴. فاصله درخشندگی و زاویه‌ای:

$$d_L = \left(\frac{L}{4\pi F} \right)^{1/2} \approx H_0^{-1} \left[z + \frac{1}{2}(1-q_0)z^2 \right], \quad d_A = \frac{D}{\delta\theta} = (1+z)^{-2} d_L. \quad (2)$$

۵. شماره ایده‌آل: $T_{\mu\nu} = (\rho + p)u_\mu u_\nu + pg_{\mu\nu}$. بقای انرژی: $\dot{\rho} + 3H(\rho + p) = 0$.

۶. پارامتر معادله حالت برای غبار: $w = 0$ ، و برای تابش: $w = 1/3$. در هر دو حالت: $\rho \propto a^{-3(1+w)}$.

۷. معادلات فریدمان:

$$H^2 + \frac{k}{a^2} = \frac{\rho}{3}, \quad \frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{1}{6}(\rho + 3p). \quad (3)$$

۸. تحول ضریب مقیاس:

$$\frac{a}{a_0} = \begin{cases} \left(\frac{t}{t_0} \right)^{2/3(1+w)} & w \neq -1, \\ \exp[\sqrt{\rho/3}(t - t_0)] & w = -1. \end{cases} \quad (4)$$

۹. چگالی بحرانی: $\rho_c = 3H^2$. کسر انرژی: $\Omega = \rho/\rho_c$.

$$\Omega_{\Lambda_0} \approx 0.68, \quad \Omega_{\text{CDM}_0} \approx 0.27, \quad \Omega_{b_0} \approx 0.05, \quad \Omega_{r_0} \approx 10^{-4}, \quad |\Omega_k| \leq 0.1. \quad (5)$$

۱۰. پارامترهای غلتش آهسته:

$$\epsilon_H = -\frac{\dot{H}}{H^2} \approx \epsilon_V = \frac{1}{2} \left(\frac{V'}{V} \right)^2, \quad \eta_H = \frac{d \log \epsilon_H}{dN}, \quad \eta_V = \frac{V''}{V} \approx 2\epsilon_H - \frac{1}{2}\eta_H. \quad (6)$$

۱۱. کنش و معادله حرکت میدان نرده‌ای:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[-\frac{1}{2}(\partial\phi)^2 - V(\phi) \right], \quad \ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V' = 0. \quad (7)$$

۱۲. چگالی انرژی و فشار میدان نرده‌ای:

$$\rho = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V, \quad p = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V. \quad (8)$$

۱۳. اختلالات طیف توان:

$$A_s = \frac{H^2}{\Lambda\pi\epsilon_H} \approx 2 \times 10^{-9}, \quad n_s = 1 - 6\epsilon_V + 2\eta_V \approx 0.96, \quad r = 16\epsilon_V \lesssim 0.1. \quad (9)$$

۱۴. ذره نسبیتی:

$$\rho \approx \frac{\pi^2}{3_0} g T^* \times \begin{cases} 1 & \text{بوزون} \\ \frac{7}{8} & \text{فرمیون} \end{cases} \quad n \approx \frac{\zeta(3)}{\pi^2} g T^3 \times \begin{cases} 1 & \text{بوزون} \\ \frac{7}{8} & \text{فرمیون} \end{cases} \quad p \approx \frac{1}{3} \rho. \quad (10)$$

۱۵. ذره غیرنسبیتی:

$$\rho \approx \left(m + \frac{7}{2} T\right) n, \quad n \approx g \left(\frac{mT}{2\pi}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{m-\mu}{T}\right), \quad p \approx nT. \quad (11)$$

۱۶. درجات آزادی مؤثر:

$$\rho = \frac{\pi^2}{3_0} g_* T_\gamma^*, \quad s = \frac{7\pi^2}{45} g_{*s} T_\gamma^*. \quad (12)$$

۱۷. اگر ذره در زمان واجفتیدگی نسبیتی باشد $T \propto a^{-1}$ و اگر غیرنسبیتی باشد $T \propto a^{-2}$.

۱۸. معادله بولتزمن برای $1 + 2 \longleftrightarrow 3 + 4$:

$$\frac{1}{a^3} \frac{d(n_1 a^3)}{dt} = -\langle \sigma v \rangle \left[n_1 n_2 - \left(\frac{n_1 n_2}{n_3 n_4} \right)_{\text{eq}} n_3 n_4 \right]. \quad (13)$$