

# Solutions to Problem Set 8

1)

معادلات معادله  $(\partial_x^2 + \partial_y^2)G = \delta(x-x_0)\delta(y-y_0)$  را که معادله ای در دو بعد است به صورت معادله  $(\nabla^2)G = \delta(x-x_0)\delta(y-y_0)$  که معادله در سه بعد است در نظر گرفته می شود. این که  $G$  تابعی از  $z$  باشد. حالا از طریق معادله ای که یک شیء استفاده می کند که معادلات از نقطه  $T$  می گذرد و فعل معادله برابر با است. انتگرال می گیریم.

$$\int \nabla^2 G = \int \nabla G \cdot \hat{n} ds = L$$

اما با توجه به تفاوت مسئله حول محور استوانه  $G$  باید تابعی از  $\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}}$  باشد. بنابراین

$$\frac{dG}{d\rho} (4\pi\rho L) = L \rightarrow dG = \frac{1}{4\pi\rho} d\rho \rightarrow G = \frac{1}{4\pi} \ln\rho + C$$

که در عبارت بالا  $C$  ثابت است و  $G$  معادله معادله است.

2)

$$\frac{\partial T}{\partial t} = k \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2}$$

$$H\phi = \lambda\phi \rightarrow k \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} = \lambda\phi \rightarrow \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} = \frac{\lambda}{k} \phi \rightarrow \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} = \frac{\lambda}{k} \phi \xrightarrow{-\frac{\lambda}{k} = k^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} + k^2 \phi = 0 \rightarrow \phi = A e^{ik\theta} \quad (-\infty < \theta < \infty)$$

$$A e^{ik\theta} = A e^{ik(\theta + 2\pi)} \rightarrow 2\pi k = 2\pi n \rightarrow \lambda = -k^2 \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

$$\int_0^{2\pi} |A_n|^2 e^{i(n-n')\theta} d\theta = 1 \rightarrow A_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

$$\langle \phi_n | \phi_{n'} \rangle = A_n A_{n'}^* \int_0^{2\pi} e^{i(n-n')\theta} d\theta = \begin{cases} 2\pi |A_n|^2 = 1 & (n=n') \\ \frac{A_n A_{n'}^*}{i(n-n')} e^{i(n-n')\theta} \Big|_0^{2\pi} = 0 & (n \neq n') \end{cases}$$

$$U(\theta, t; \theta', t') = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i\lambda_n(t-t')} \phi_n^*(\theta) \phi_n(\theta') = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right) e^{-ikn^2(t-t')} e^{-in\theta} e^{in\theta'} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in(\theta'-\theta) - kn^2(t-t')}$$

در حد  $t-t' \rightarrow \infty$  تنها جمله  $n=0$  باقی می ماند. بنابراین

$$\lim_{t-t' \rightarrow \infty} U(\theta, t; \theta', t') = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

3)

تقلبات کنیم که  $T(\phi, r) = T(\phi + 2\pi, r)$ ، بنابراین با توجه به مثال قبل  $T(\phi, r)$  به صورت زیر خواهد بود.

$$T(\phi, r) = \sum_n A_n(r) \psi_n(\phi)$$

که در آن  $A_n(r) = \psi_n(\phi) \cdot \frac{e^{in\phi}}{\sqrt{2\pi}}$  به صورت زیر به دست می آید.

$$\frac{dA_n(r)}{dr} = -k_n r A_n(r) \rightarrow A_n(r) = A_n(0) e^{-k_n r}$$

$$T(\phi, r) = \sum_n A_n(0) e^{-k_n r} \psi_n(\phi) \rightarrow T(0, \phi) = \sum_n A_n(0) \psi_n(\phi) \rightarrow A_n(0) = \int_{-\pi}^{\pi} \psi_n(\phi) T(0, \phi) d\phi = \int_{-\pi}^{\pi} \psi_n(\phi) T_0 \delta(\phi - \phi_0) d\phi$$

$$= T_0 \psi_n^*(\phi_0) = \frac{T_0}{\sqrt{r\pi}} e^{-in\phi_0}$$

$$T(\phi, r) = \sum_n \frac{T_0}{\sqrt{r\pi}} e^{-in\phi_0} e^{-k_n r} \frac{e^{in\phi}}{\sqrt{r\pi}} = \frac{T_0}{r\pi} \sum_n e^{-k_n r} e^{in(\phi - \phi_0)} = \frac{T_0}{r\pi} \sum_n e^{-k_n r} (\cos n(\phi - \phi_0) + i \sin n(\phi - \phi_0))$$

با توجه به مقادیری که  $n$  به خود میگیرد  $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$  با هم میزنند و بسط

$$T(\phi, r) = \frac{T_0}{r\pi} \sum_n e^{-k_n r} \cos n(\phi - \phi_0)$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} T(\phi, r) = \frac{T_0}{r\pi}$$

چرا که فقط برای  $n=0$  عبارت در صفر نماند است

4)

$$\frac{\partial T}{\partial t} = k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

$$k \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \lambda \phi \rightarrow \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \frac{\lambda}{k} \phi = -\frac{\lambda}{k} = -k^2 \rightarrow \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + k^2 \phi = 0 \rightarrow \phi = A e^{ikx} \quad (-\infty < x < \infty)$$

$$\langle \phi_k | \phi_{k'} \rangle = A_k A_{k'}^* \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(k-k')x} dx = 2\pi A_k A_{k'}^* \delta(k-k') \rightarrow A_k = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

$$U(x, t; x', t') = \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ik(x-x')} \phi_k^*(x') \phi_k(x) = \frac{1}{r\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{-k^2 r(t-t')} e^{-ikx} e^{ikx'} = \frac{1}{r\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-k^2 r(t-t')} + i k(x-x') dk$$

$$\text{میباشد} \quad \frac{e^{\frac{-(x-x')^2}{4r(t-t')}}}{\sqrt{r\pi} k(t-t')}$$

که با توجه به قسمت (c) سؤال 3 می بینیم حاصل اشتغال بالا