نیمسال اول ۹۶-۱۳۹۵
۹۵/۹/۴

امتحان میان‌ترم

الکترومغناطیس ۱

زمان: ۲/۵ ساعت

به همراه داشتن جزوه، کتاب، و ابزارهای محاسباتی مثل ماشین‌حساب و تلفن همراه مجاز نمی‌باشد. معادلات باید با توضیح مناسب همراه باشند. پاسخ نهایی را داخل کادر مشخص کنید.

۱ــ بار نقطه‌ای q در مرکز یک پوسته کروی رسانا و خنثی به شعاع داخلی a و شعاع خارجی b قرار دارد. کار لازم را برای انتقال بار (از طریق سوراخی بی‌نهایت کوچک در پوسته) به بی‌نهایت پیدا کنید. [۲۰]

۲ــ کره‌ای رسانا به شعاع R دارای بار کل Q می‌باشد. بار نقطه‌ای q در فاصله $d > R$ از مرکز کره قرار دارد. توزیع بار روی کره را به دست آورید. [۳۰]

۳ــ یک دوقطبی از بارهای $\pm q$ به فاصله d تشکیل شده است و در مرکز پوسته‌ای رسانا با پتانسیل صفر و شعاع a قرار دارد. با استفاده از روش بارهای تصویری پتانسیل الکتریکی را در داخل پوسته به دست آورید. نتیجه را در حد دوقطبی ایده‌آل ($d \to 0$، $q \to \infty$) بیان کنید. [۳۰]

۴ــ یک دوقطبی ایده‌آل در مرکز پوسته‌ای رسانا با پتانسیل صفر و شعاع a قرار دارد. با حل معادله لاپلاس در مختصات کروی پتانسیل الکتریکی را در داخل پوسته به دست آورید. [۲۵]

۵ــ بار q به طور یکنواخت روی حلقه‌ای دایره شکل در صفحه xy به مرکز مبدأ مختصات و شعاع a توزیع شده است. دو جمله اول از بسط چندقطبی پتانسیل را به دست آورید. [۱۰]

روابط مورد نیاز

۱. مختصات خمیده متعامد: $ds^2 = h_1^2 dq_1^2 + h_2^2 dq_2^2 + h_3^2 dq_3^2$.
دستگاه کروی: $ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\phi^2$.
دستگاه استوانه‌ای: $ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + dz^2$.

۲. عملگرهای برداری در مختصات خمیده متعامد:

$$\nabla f = \frac{1}{h_1}\frac{\partial f}{\partial q_1}\mathbf{e}_1 + \frac{1}{h_2}\frac{\partial f}{\partial q_2}\mathbf{e}_2 + \frac{1}{h_3}\frac{\partial f}{\partial q_3}\mathbf{e}_3, \tag{1}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left[\frac{\partial(h_2 h_3 F_1)}{\partial q_1} + \frac{\partial(h_3 h_1 F_2)}{\partial q_2} + \frac{\partial(h_1 h_2 F_3)}{\partial q_3}\right], \tag{2}$$

$$\nabla \times \mathbf{F} = \frac{1}{h_2 h_3}\left[\frac{\partial(h_3 F_3)}{\partial q_2} - \frac{\partial(h_2 F_2)}{\partial q_3}\right]\mathbf{e}_1 + \frac{1}{h_3 h_1}\left[\frac{\partial(h_1 F_1)}{\partial q_3} - \frac{\partial(h_3 F_3)}{\partial q_1}\right]\mathbf{e}_2 + \frac{1}{h_1 h_2}\left[\frac{\partial(h_2 F_2)}{\partial q_1} - \frac{\partial(h_1 F_1)}{\partial q_2}\right]\mathbf{e}_3. \tag{3}$$

۳. چند اتحاد:

$$\nabla(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) = \mathbf{A}\times(\nabla\times\mathbf{B}) + \mathbf{B}\times(\nabla\times\mathbf{A}) + (\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{B} + (\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{A}, \tag{4}$$

$$\nabla\times(\nabla\times\mathbf{A}) = \nabla(\nabla\cdot\mathbf{A}) - \nabla^2\mathbf{A}, \tag{5}$$

$$\nabla\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) = \mathbf{B}\cdot(\nabla\times\mathbf{A}) - \mathbf{A}\cdot(\nabla\times\mathbf{B}), \tag{6}$$

$$\nabla\times(f\mathbf{A}) = f(\nabla\times\mathbf{A}) - \mathbf{A}\times(\nabla f), \tag{7}$$

$$\nabla\times(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) = (\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{A} - (\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{B} + \mathbf{A}(\nabla\cdot\mathbf{B}) - \mathbf{B}(\nabla\cdot\mathbf{A}). \tag{8}$$

۴. قضیه هلمهولتز:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\nabla\int_{\mathcal{V}}\frac{\nabla'\cdot\mathbf{F}(\mathbf{r}')}{4\pi \mathscr{r}}d\tau' + \nabla\times\int_{\mathcal{V}}\frac{\nabla'\times\mathbf{F}(\mathbf{r}')}{4\pi \mathscr{r}}d\tau'. \tag{9}$$

۵. انرژی میدان:

$$\frac{1}{2}\epsilon_0\int E^2 d\tau = \frac{1}{2}\int \rho V d\tau. \tag{10}$$

۶. بار q در فاصله a از مرکز کره رسانا به شعاع R قرار دارد. بار تصویری $-Rq/a$ در فاصله R^2/a از مرکز کره قرار می‌گیرد.

۷. جواب‌های معادله لاپلاس در مختصات دکارتی: $e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}$
در مختصات استوانه‌ای: $1, \ln s, s^n \sin n\phi, s^n \cos n\phi$
در مختصات کروی: $r^l P_l(\cos\theta), r^{-l-1}P_l(\cos\theta)$

۸. فرمول رودریگز و تابع مولد لژاندر:

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!}\left(\frac{d}{dx}\right)^l (x^2-1)^l, \qquad \frac{1}{\mathscr{r}} = \frac{1}{r}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r'}{r}\right)^n P_n(\hat{\mathbf{r}}\cdot\hat{\mathbf{r}}'), \qquad P_l(1) = 1. \tag{11}$$

۹. میدان و پتانسیل دوقطبی:

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}{r^3}, \qquad \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{3(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r})\mathbf{r} - \mathbf{p}r^2}{r^5} - \frac{1}{3\epsilon_0}\mathbf{p}\delta^3(\mathbf{r}). \tag{12}$$