



به همراه داشتن جزوه، کتاب، و ابزارهای محاسباتی مثل ماشین حساب و تلفن همراه مجاز نمی‌باشد. معادلات باید با توضیح مناسب همراه باشند. پاسخ نهایی را داخل کادر مشخص کنید.

۱- عالمی را تصور کنید که فقط از تابش تشکیل شده است. رویدادی را مشاهده می‌کنیم که در $z = 1$ رخ داده است. نسبت سن [۱۰] عالم در آن زمان به سن کنونی‌اش را به دست آورید.

۲- آیا می‌توان با استفاده از رابطه $H(t) = (1+z)H_0 - dz/dt$ ، ولی بدون استفاده از شمع استاندارد، به انبساط تندشونده عالم پی برد؟ [۱۰]

۳- یک تابع $a(t)$ مثال بزنید که در عالم FLRW مربوط به آن، ناظر واقع در مبدأ مختصات هم افق رویداد داشته باشد و هم افق ذره. نمودار $r-\tau$ (زمان همدیس برحسب شعاع) را رسم کنید. [۳۰]

- ۳- مدل تورمی $\lambda\phi^n$ را در نظر بگیرید.
- [۵] (الف) مقدار ϕ را در انتهای تورم ($\epsilon = 1$) پیدا کنید.
- [۲۰] (ب) مقدار ϕ را e^{60} تا قبل از پایان تورم پیدا کنید.
- [۱۰] (ج) پارامتر λ را به گونه‌ای مشخص کنید که بهنجارش COBE ($A_s \approx 2 \times 10^{-9}$) برقرار باشد.
- [۵] (د) مقدار ϕ را در زمانی که اثرات گرانش کوانتومی مهم می‌شوند پیدا کنید.
- [۱۰] (ه) پارامترهای n_s و r را محاسبه کنید.

۴- فرض کنید به جای سه نوع نوترینو $(\nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau)$ ، نوع نوترینو داریم. دمای امروزی نوترینوها را برحسب دمای فوتون‌ها به دست آورید. از این واقعیت استفاده کنید که نوترینوها در دمای 8 MeV از حمام گرمایی خارج می‌شوند و جرم الکترون برابر است با 5 MeV . [۳۰]

۵- واکنش مربوط به فرآیند بازترکیب الکترون-پروتون (recombination) را بیان کنید. همچنین نموداری برای کسر الکترون‌های آزاد (X_e) بر حسب زمان رسم کنید (در هر دو حالت تعادلی و واقعی). بر روی نمودار زمان بازترکیب، جدایی الکترون-فوتون (decoupling)، و تثبیت الکترون‌ها (electron freeze-out) را مشخص نمایید. [۳۰]

روابط مورد نیاز

- واحدهای پلانک: $M_p = (\Lambda\pi G)^{-1/2} = \hbar = c = k_B = 1$. نشانگان متریک: $-++$.
- متریک FLRW:

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2 [d\chi^2 + S_k(\chi)^2 d\Omega^2], \quad S_k(\chi) = \begin{cases} \sin \chi & k = 1 \text{ (بسته)}, \\ \chi & k = 0 \text{ (تخت)}, \\ \sinh \chi & k = -1 \text{ (باز)}. \end{cases} \quad (1)$$

- زمان همدیس: $d\tau = \frac{dt}{a}$. انتقال به سرخ: $1+z = \frac{a_0}{a}$. پارامتر هابل: $H = 100 h \frac{\text{km}}{\text{s Mpc}}$ ، $h \approx 0.7$. پارامتر کندشوندگی: $q = -\ddot{a}/H^2 a$.
- فاصله درخشندگی و زاویه‌ای:

$$d_L = \left(\frac{L}{4\pi F} \right)^{1/2} \approx H_0^{-1} \left[z + \frac{1}{2}(1-q_0)z^2 \right], \quad d_A = \frac{D}{\delta\theta} = (1+z)^{-2} d_L. \quad (2)$$

- شماره ایده‌آل: $T_{\mu\nu} = (\rho + p)u_\mu u_\nu + pg_{\mu\nu}$. بقای انرژی: $\dot{\rho} + 3H(\rho + p) = 0$.
- پارامتر معادله حالت برای غبار: $w = 0$ ، و برای تابش: $w = 1/3$. در هر دو حالت: $\rho \propto a^{-3(1+w)}$.
- معادلات فریدمان:

$$H^2 + \frac{k}{a^2} = \frac{\rho}{3}, \quad \frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{1}{6}(\rho + 3p). \quad (3)$$

- تحول ضریب مقیاس:

$$\frac{a}{a_0} = \begin{cases} \left(\frac{t}{t_0}\right)^{2/3(1+w)} & w \neq -1, \\ \exp[\sqrt{\rho/3}(t - t_0)] & w = -1. \end{cases} \quad (4)$$

- چگالی بحرانی: $\rho_c = 3H^2$. کسر انرژی: $\Omega = \rho/\rho_c$.

$$\Omega_{\Lambda_0} \approx 0.68, \quad \Omega_{\text{CDM}_0} \approx 0.27, \quad \Omega_{b_0} \approx 0.05, \quad \Omega_{r_0} \approx 10^{-4}, \quad |\Omega_k| \leq 0.01. \quad (5)$$

- پارامترهای غلتش آهسته:

$$\epsilon_H = -\frac{\dot{H}}{H^2} \approx \epsilon_V = \frac{1}{2} \left(\frac{V'}{V} \right)^2, \quad \eta_H = \frac{d \log \epsilon_H}{dN}, \quad \eta_V = \frac{V''}{V} \approx 2\epsilon_H - \frac{1}{2}\eta_H. \quad (6)$$

- کنش و معادله حرکت میدان نرده‌ای:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[-\frac{1}{2}(\partial\phi)^2 - V(\phi) \right], \quad \ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V' = 0. \quad (7)$$

- چگالی انرژی و فشار میدان نرده‌ای:

$$\rho = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V, \quad p = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V. \quad (8)$$

- اختلالات طیف توان:

$$A_s = \frac{H^2}{\Lambda\pi\epsilon_H} \approx 2 \times 10^{-9}, \quad n_s = 1 - 6\epsilon_V + 2\eta_V \approx 0.96, \quad r = 16\epsilon_V \lesssim 0.1. \quad (9)$$

- ذره نسبیتی:

$$\rho \approx \frac{\pi^2}{30} g T^4 \times \begin{cases} 1 & \text{بوزون} \\ \frac{7}{8} & \text{فرمیون} \end{cases}, \quad n \approx \frac{\zeta(3)}{\pi^2} g T^3 \times \begin{cases} 1 & \text{بوزون} \\ \frac{7}{8} & \text{فرمیون} \end{cases}, \quad p \approx \frac{1}{3}\rho. \quad (10)$$

- ذره غیرنسبیتی:

$$\rho \approx \left(m + \frac{3}{2}T \right) n, \quad n \approx g \left(\frac{mT}{2\pi} \right)^{3/2} \exp \left(-\frac{m - \mu}{T} \right), \quad p \approx nT. \quad (11)$$

- درجات آزادی مؤثر:

$$\rho = \frac{\pi^2}{30} g_* T_\gamma^4, \quad s = \frac{2\pi^2}{45} g_{*s} T_\gamma^3. \quad (12)$$

- اگر ذره در زمان واجفتیدگی نسبیتی باشد $T \propto a^{-1}$ و اگر غیرنسبیتی باشد $T \propto a^{-2}$.

- معادله بولتزمن برای $1 + 2 \longleftrightarrow 3 + 4$:

$$\frac{1}{a^3} \frac{d(n_1 a^3)}{dt} = -\langle \sigma v \rangle \left[n_1 n_2 - \left(\frac{n_1 n_2}{n_3 n_4} \right)_{\text{eq}} n_3 n_4 \right]. \quad (13)$$