۱- از این استفاده می‌کنیم که بردار $\vec{\nabla} f$ بر سطح تعریف شده با معادله $f(x,y,z)=0$ عمود است.

$$f_1 = ax+by+cz-d \Rightarrow \boxed{\nabla f_1 = a\hat{e}_x + b\hat{e}_y + c\hat{e}_z} \qquad (۱$$

$$f_2 = r-a \Rightarrow \boxed{\nabla f_2 = \hat{e}_r} \qquad (۲$$

$$f_3 = x^2+y^2+z^2-a^2 \Rightarrow \boxed{\nabla f_3 = 2x\hat{e}_x + 2y\hat{e}_y + 2z\hat{e}_z} \qquad (۳$$

$$f_4 = \sqrt{x^2+y^2+z^2}-a \Rightarrow \boxed{\nabla f_4 = \frac{2x\hat{e}_x+2y\hat{e}_y+2z\hat{e}_z}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}} = \frac{1}{2a}\nabla f_3 \qquad (۴$$

همه سازگارند. ∇f_3 و ∇f_4 با هم موازی‌اند و ∇f_2 و ∇f_4 هم برابرند زیرا $\hat{e}_r = \frac{x}{a}\hat{e}_x + \frac{y}{a}\hat{e}_y + \frac{z}{a}\hat{e}_z$.

۲- مؤلفه iام عبارت مورد نظر برابر است با:

$$[\vec{\nabla}\times(f\vec{F})]_i = \epsilon_{ijk}\,\partial_j\,(fF)_k$$

$$= \epsilon_{ijk}\,\partial_j\,(fF_k) \underset{\text{قاعده لایبنیتز}}{=} \epsilon_{ijk}\big((\partial_j f)F_k + f(\partial_j F_k)\big) = \epsilon_{ijk}(\nabla f)_j F_k + f\,\epsilon_{ijk}\partial_j F_k$$

$$= [(\vec{\nabla} f)\times\vec{F}]_i + f[\vec{\nabla}\times\vec{F}]_i$$

$$\boxed{\vec{\nabla}\times(f\vec{F}) = (\vec{\nabla} f)\times\vec{F} + f\,\vec{\nabla}\times\vec{F}}$$

چون i دلخواه است،

۳- الف) می‌توان θ و ϕ را تابعی از l (پارامتر طول روی خم) گرفت. در این صورت می‌توان به جای $a\int\sqrt{d\theta^2+\sin^2\theta\, d\phi^2}$ عبارت $a\int\left[\left(\frac{d\theta}{dl}\right)^2+\sin^2\theta\left(\frac{d\phi}{dl}\right)^2\right]dl$ را کمینه کرد. معادله اویلر-لاگرانژ می‌شود:

$$\boxed{\frac{d}{dl}\left[2a\frac{d\theta}{dl}\right] = 2a\sin\theta\cos\theta\left(\frac{d\phi}{dl}\right)^2, \qquad \frac{d}{dl}\left[2a\sin^2\theta\frac{d\phi}{dl}\right] = 0} \quad \text{(روش اول)}$$

از این دستگاه معادلات می‌توان $\theta(l)$ و $\phi(l)$ را به دست آورد.

می‌توان θ را تابعی از ϕ گرفت. در این صورت باید $a\int\sqrt{\left(\frac{d\theta}{d\phi}\right)^2+\sin^2\theta}\,d\phi$ را کمینه کرد. معادله اویلر-لاگرانژ می‌شود:

$$\frac{d\theta}{d\phi}\times a\frac{\frac{d\theta}{d\phi}}{\sqrt{\left(\frac{d\theta}{d\phi}\right)^2+\sin^2\theta}} - a\sqrt{\left(\frac{d\theta}{d\phi}\right)^2+\sin^2\theta} = C \Rightarrow \boxed{\frac{-a\sin^2\theta}{\sqrt{\left(\frac{d\theta}{d\phi}\right)^2+\sin^2\theta}} = C} \quad \text{(روش دوم)}$$

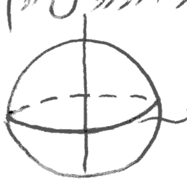
زیرا انتگرالده به ϕ بستگی ندارد. از این معادله می‌توان $\theta(\phi)$ را به دست آورد.

می‌توان ϕ را تابعی از θ گرفت. در این صورت باید $a\int\sqrt{1+\sin^2\theta\left(\frac{d\phi}{d\theta}\right)^2}\,d\theta$ را کمینه کرد. معادله اویلر-لاگرانژ می‌شود:

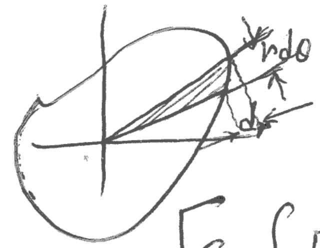
$$\frac{d}{d\theta}\left[\frac{a\sin^2\theta\,\frac{d\phi}{d\theta}}{\sqrt{1+\sin^2\theta\left(\frac{d\phi}{d\theta}\right)^2}}\right] = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{a\sin^2\theta\,\frac{d\phi}{d\theta}}{\sqrt{1+\sin^2\theta\left(\frac{d\phi}{d\theta}\right)^2}} = C'} \quad \text{(روش سوم)}$$

از این معادله می‌توان $\phi(\theta)$ را به دست آورد. واضح است که این معادله هم ارز معادله قبلی است با $C'=-C$.

ب) در روش اول جاگذاری $\theta=\frac{\pi}{2}$ و $\phi=$ ثابت به وضوح معادلات را برقرار می‌کند. در روش دوم هم جاگذاری $\theta=\frac{\pi}{2}$ و $C=-a$ معادلات را برقرار می‌کند. با دقت در شکل می‌بینیم که مسیر $\theta=\frac{\pi}{2}$ دایره عظیمه‌ای روی خط استوای کره است.



$\theta=\frac{\pi}{2}$



۴- الف) با توجه به شکل طول کمان از $dl^2 = dr^2 + (rd\theta)^2$ بدست می‌آید.
همچنین مساحت ناحیه هاشور خورده برابر است با مساحت مثلثی با ارتفاع r و قاعده $rd\theta$.
پس،

$$\left[C = \int \sqrt{dr^2 + r^2 d\theta^2} = \boxed{\int \sqrt{\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2}\; d\theta}\right. \quad , \quad \boxed{A = \int \frac{1}{2} r^2 d\theta}$$

ب) باید معادله اویلر-لاگرانژ را برای $A + \lambda C$ بنویسیم یعنی برای
$$f(r,r') = \frac{1}{2}r^2 + \lambda\sqrt{r'^2 + r^2}$$
که حل شود،

$$r' \times \frac{\lambda r'}{\sqrt{r'^2+r^2}} - \left[\frac{1}{2}r^2 + \lambda\sqrt{r'^2+r^2}\right] = D = \text{ثابت}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{-\lambda r^2}{\sqrt{r'^2+r^2}} - \frac{1}{2}r^2 = D}$$

ج) دایره به مرکز مبدأ دارای معادله $r = a =$ ثابت است. پس معادله فوق برقرار است اگر $-\lambda a - \frac{a^2}{2}$ ثابت باشد (مستقل از θ) که به وضوح هست.

به جواب‌های دیگر: D، λ های دیگر وجود دارند معادل دوایری با شعاع‌های مختلف با مراکزی واقع در نقاطی غیر از مبدأ می‌باشند.

۵- معادله اویلر-لاگرانژ عبارت است از:

$$\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i}\left[\frac{\partial \phi}{\partial x_i}\right] = -\rho \quad \Rightarrow \quad \boxed{\nabla^2 \phi = -\rho}$$

پس ϕ باید در معادله فوق صدق کند.