امتحان میان‌ترم ریاضی مهندسی

۱۹ آبان ۱۳۹۲

توجه: معادلات باید با توضیح مناسب همراه باشند. پاسخ نهایی را داخل کادر مشخص کنید.

۱ـ در هر یک از موارد زیر معادله داده شده سطحی را در فضای سه‌ـبعدی مشخص می‌کند. با استفاده از گرادیان بردار عمود بر سطح را در هر نقطه روی آن به دست آورید:

۱. صفحه در مختصات دکارتی $ax + by + cz = d$ [۵ نمره]

۲. کره در مختصات کروی $r = a$ [۵ نمره]

۳. کره در مختصات دکارتی $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ [۱۰ نمره]

۴. کره در مختصات دکارتی $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - a = 0$ [۱۰ نمره]

آیا نتایج سه مورد آخر با هم سازگارند؟ توضیح دهید. [۵ نمره]

۲ـ فرض کنید f یک میدان نرده‌ای و $\mathbf{F}$ یک میدان برداری باشد. با استفاده از قاعده لایبنیتز عبارت $\nabla \times (f\mathbf{F})$ را برحسب جملاتی بنویسید که مشتق فقط از f یا $\mathbf{F}$ گرفته شده باشد. از نمادگذاری اندیسی استفاده کنید. [۲۰ نمره]

۳ـ الف) معادله‌ای برای کوتاه‌ترین مسیر بین دو نقطه روی سطح کره‌ای به شعاع a به دست آورید. (راهنمایی: از مختصات کروی (θ, ϕ) استفاده کنید و این که عنصر طول روی کره با $ds^2 = a^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$ داده می‌شود. θ را تابعی از ϕ بگیرید.) [۳۰ نمره]

ب) نشان دهید $\theta = \pi/2$ جواب این معادله است. معنای این مسیر چیست؟ [۱۰ نمره]

۴ـ مسأله هم‌ـپیرامونی در مختصات قطبی: معادله $r(\theta)$ برای یک خم بسته روی صفحه در مختصات قطبی را در نظر بگیرید.

الف) محیط خم C و مساحت آن A را به صورت انتگرالی بر حسب r بنویسید. [۲۰ نمره]

ب) معادله اویلرـ لاگرانژ را برای بیشینه کردن A با قید ثابت بودن C به دست آورید [۲۰ نمره].

ج) نشان دهید دایره به مرکز مبدأ در این معادله صدق می‌کند. آیا معادله قسمت (ب) جواب‌های دیگری هم دارد؟ اگر نه چرا و اگر بله بدون انجام محاسبه درباره آن‌ها توضیح دهید. [۱۰ نمره]

۵ـ تحت چه شرایطی

$$I[\phi] = \int \left(\frac{1}{2} |\nabla\phi(\mathbf{x})|^2 - \rho(\mathbf{x})\phi(\mathbf{x}) \right) d^3x$$

کمینه می‌شود؟ ($\rho(\mathbf{x})$ تابعی است مشخص و داده شده). [۳۰ نمره]

روابط مورد نیاز

- تبدیلات متعامد

$$\mathbf{x} = x_i \mathbf{e}_i = x'_i \mathbf{e}'_i \qquad (۱)$$

$$\mathbf{e}'_i = a_{ij}\mathbf{e}_j, \qquad \mathbf{e}_i = a_{ji}\mathbf{e}'_j, \qquad (۲)$$

$$x'_i = a_{ij}x_j, \qquad x_i = a_{ji}x'_j, \qquad (۳)$$

$$a_{ik}a_{jk} = a_{ki}a_{kj} = \delta_{ij}. \qquad (۴)$$

- نماد لوی‌ـچیویتا و ضرب خارجی

$$\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j = \epsilon_{ijk}\mathbf{e}_k, \qquad \epsilon_{ijk}\epsilon_{lmk} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}. \qquad (۵)$$

- مختصات خمیده متعامد

$$ds^۲ = h_۱^۲ dq_۱^۲ + h_۲^۲ dq_۲^۲ + h_۳^۲ dq_۳^۲. \qquad (۶)$$

کروی:

$$ds^۲ = dr^۲ + r^۲ d\theta^۲ + r^۲ \sin^۲\theta d\phi^۲, \qquad (۷)$$

استوانه‌ای:

$$ds^۲ = dr^۲ + r^۲ d\theta^۲ + dz^۲. \qquad (۸)$$

- عملگرهای برداری در مختصات خمیده متعامد

$$\nabla f = \frac{۱}{h_۱}\frac{\partial f}{\partial q_۱}\mathbf{e}_۱ + \frac{۱}{h_۲}\frac{\partial f}{\partial q_۲}\mathbf{e}_۲ + \frac{۱}{h_۳}\frac{\partial f}{\partial q_۳}\mathbf{e}_۳, \qquad (۹)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{۱}{h_۱h_۲h_۳}\left[\frac{\partial(h_۲h_۳F_۱)}{\partial q_۱} + \frac{\partial(h_۳h_۱F_۲)}{\partial q_۲} + \frac{\partial(h_۱h_۲F_۳)}{\partial q_۳}\right], \qquad (۱۰)$$

$$\nabla \times \mathbf{F} = \frac{۱}{h_۲h_۳}\left[\frac{\partial(h_۳F_۳)}{\partial q_۲} - \frac{\partial(h_۲F_۲)}{\partial q_۳}\right]\mathbf{e}_۱ + \frac{۱}{h_۳h_۱}\left[\frac{\partial(h_۱F_۱)}{\partial q_۳} - \frac{\partial(h_۳F_۳)}{\partial q_۱}\right]\mathbf{e}_۲ + \frac{۱}{h_۱h_۲}\left[\frac{\partial(h_۲F_۲)}{\partial q_۱} - \frac{\partial(h_۱F_۱)}{\partial q_۲}\right]\mathbf{e}_۳. \qquad (۱۱)$$

- قضیه گاوس (واگرایی) و قضیه استوکس

$$\int \nabla \cdot \mathbf{F} dV = \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{A}, \qquad \int \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{A} = \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}. \qquad (۱۲)$$

- معادله اویلرـلاگرانژ برای $\int f(x_i, y_j, \partial_i y_j)dx$ تحت قیود $\int g_\alpha(x_i, y_j, \partial_i y_j)dx = ۰$ و $h_\beta(x_i, y_j, \partial_i y_j) = ۰$:

$$\partial_i\left(\frac{\partial k}{\partial(\partial_i y_j)}\right) = \frac{\partial k}{\partial y_j}, \qquad k = f + \lambda_\alpha g_\alpha + \mu_\beta(x)h_\beta. \qquad (۱۳)$$

- معادله اویلرـلاگرانژ وقتی $f(y_i, y'_i)$ صریحا به x بستگی ندارد

$$y'_i\frac{\partial f}{\partial y'_i} - f = \text{constant}. \qquad (۱۴)$$