۱- الف) فضای برداری نیست زیرا نسبت به عمل جمع بسته نیست مثلاً مجموع $\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=I$ و خودش یک ماتریس دوران نیست (ماتریس های دوران همگی دارای دترمینان واحد اند).

ب) فضای برداری نیست زیرا نسبت به عمل جمع بسته نیست مثلاً مجموع $f(x)=1$ و خودش تابعی است که در شرط مرزی $f(a)=f(b)=1$ صدق نمی‌کند.

پ) فضای برداری هست زیرا ~~...~~ هر ترکیب خطی دو جواب معادله خطی همگن یک جواب آن معادله است $\{y(x)=e^{x}, y(x)=e^{-x}\}$ یک پایه این فضاست همین طور مثلاً $\{e^{x}+e^{-x}, e^{x}-e^{-x}\}$،

۲- الف) برای قطری کردن A ابتدا ویژه مقادیر و ویژه بردارش را می‌یابیم:

$$\det(A-\lambda I)=0 \Rightarrow \det\begin{pmatrix}7-12\lambda & -1\\ -1 & 7-12\lambda\end{pmatrix}=0 \Rightarrow 7-12\lambda=\pm 1 \Rightarrow \lambda=\frac{1}{2}, \frac{2}{3}$$

$$\lambda=\frac{1}{2}: \frac{1}{12}\begin{pmatrix}7&-1\\-1&7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \Rightarrow 7x-y=6x \Rightarrow y=x \Rightarrow x\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=$$ ویژه بردار مربوط به $\lambda=1/2$

$$\lambda=\frac{2}{3}: \frac{1}{12}\begin{pmatrix}7&-1\\-1&7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\frac{2}{3}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \Rightarrow 7x-y=8x \Rightarrow y=-x \Rightarrow x\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}=$$ 〃 〃 $\lambda=2/3$

ماتریسی که به جای ستون‌هایش ویژه بردارهای A می‌رود $S_A=\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}$ است و در پایه جدید عملگر قطری است،

$$D_A=\begin{pmatrix}1/2&0\\0&2/3\end{pmatrix}=S_A^{-1}\begin{pmatrix}7/12&-1/12\\-1/12&7/12\end{pmatrix}S_A=S_A^{-1}AS_A$$

وارون کردن D_A ساده است: $D_A^{-1}=\begin{pmatrix}2&\\&3/2\end{pmatrix}$. حال به پایه اولیه برمی‌گردیم تا A^{-1} به دست آید. کافی است از دو طرف رابطه فوق وارون بگیریم:

$$D_A^{-1}=S_A^{-1}A^{-1}S_A \Rightarrow \boxed{A^{-1}=S_AD_A^{-1}S_A^{-1}=\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0\\0&3/2\end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}7&1\\1&7\end{pmatrix}}$$

ب) حال B را قطری می‌کنیم: $B=\frac{1}{12}\begin{pmatrix}5&1\\1&5\end{pmatrix}$:

$$\det\begin{pmatrix}5-12\lambda&1\\1&5-12\lambda\end{pmatrix}=0 \rightarrow 5-12\lambda=\pm 1 \longrightarrow \lambda=\frac{1}{2}, \frac{1}{3}$$

$$\lambda=\frac{1}{2}: \frac{1}{12}\begin{pmatrix}5&1\\1&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \Rightarrow 5x+y=6x \Rightarrow x=+y \Rightarrow x\begin{pmatrix}1\\+1\end{pmatrix}=$$ ویژه بردار مربوط به $\lambda=1/2$

$$\lambda=\frac{1}{3}: \frac{1}{12}\begin{pmatrix}5&1\\1&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \Rightarrow 5x+y=4x \rightarrow x=-y \Rightarrow x\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}=$$ $\lambda=1/3$ 〃 〃

$$D_B=\begin{pmatrix}1/2&0\\0&1/3\end{pmatrix}=S_B^{-1}\begin{pmatrix}5/12&1/12\\1/12&5/12\end{pmatrix}S_B=S_B^{-1}BS_B$$ ، $S_B=\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}$ نیز داریم

حال عبارت $A^{-1}=I+B+B^2+\dots$ را می‌نویسیم و از رابطه روبرو کمک می‌گیریم:

$$B=S_BD_BS_B^{-1}$$

$$A^{-1} = I + S_B D_B S_B^{-1} + (S_B D_B S_B^{-1})(S_B D_B S_B^{-1}) + \dots$$

$$= S_B \left[I + D_B + D_B^{2} + \dots \right] S_B^{-1}$$

عبارت داخل براکت به سادگی قابل محاسبه است.

$$\begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/2 & \\ & 1/3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (1/2)^2 & \\ & (1/3)^2 \end{pmatrix} + \dots = \begin{pmatrix} \frac{1}{1-1/2} & \\ & \frac{1}{1-1/3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & \\ & 3/2 \end{pmatrix}$$

در نتیجه،

$$\boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3/2 \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}}$$

۳- توابع پایه روی $[-1,1]$ عبارت اند از $\frac{1}{\sqrt{2}} \exp\left(i\pi n x\right)$ پس بسط فوریه می‌شود،

$$x^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \exp(i\pi n x) \implies \int_{-1}^{1} x^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \exp(-i\pi n x)\, dx = c_n$$

پس باید انتگرال فوق را حساب کنیم (که روش‌های مختلفی دارد از جمله:

$$I(k) = \int_{-1}^{1} e^{kx}\, dx \implies \frac{d^2 I}{dk^2} = \int_{-1}^{1} x^2 e^{kx}\, dx \qquad \left[I(k) = \frac{1}{k}\left(e^{k} - e^{-k}\right) \right] \quad k \neq 0$$

$$= \frac{2}{k^3}\left(e^{k} - e^{-k}\right) + 2\,\frac{-1}{k^2}\left(e^{k} + e^{-k}\right) + \frac{1}{k}\left(e^{k} - e^{-k}\right)$$

بنابراین (چون در اینجا $k = -i\pi n$ است و برای $n=0$ هم به سادگی داریم: $C_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{2}{3}$):

$$\sqrt{2}\, c_n = \left(\frac{2}{k^3} + \frac{1}{k}\right) 2i \underbrace{\sin(-\pi n)}_{0} + \frac{-2}{k^2} \cdot 2 \underbrace{\cos \pi n}_{(-1)^n} = -\frac{4}{k^2}(-1)^n = \frac{4(-1)^n}{\pi^2 n^2}$$

و در نهایت داریم

$$\boxed{x^2 = \frac{1}{2}\left[\frac{2}{3} + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} \frac{4}{\pi^2 n^2} (-1)^n e^{i\pi n x}\right] = \frac{1}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi^2 n^2} (-1)^n e^{i\pi n x}}$$

اکنون با استفاده از قضیه پارسوال داریم،

$$\sum |c_n|^2 = \int_{-1}^{1} x^2 x^2\, dx = 2/5$$

پس

$$\frac{1}{2}\left[\left(\frac{2}{3}\right)^2 + 2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{\pi^2 n^2}\right)^2\right] = \frac{2}{5} \implies \boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}}$$

۴- توابع $P_1, P_2, \dots$ را به صورت زیر می‌سازیم:

$$\boxed{P_1 = \frac{x}{\| x \|} = \frac{x}{\sqrt{\int_{-1}^{1} x \cdot x\, dx}} = \sqrt{\frac{3}{2}}\, x}$$

P_2 باید به P_1 عمود باشد و از ترکیب خطی x, x^2 ساخته شود. اما $(x, x^2) = 0$ (چون $\int x^3 = 0$)

پس P_2 فقط در امتداد x^2 است و کافی است بهنجار شود:

$$\boxed{P_2 = \frac{x^2}{\| x^2 \|} = \frac{x^2}{\sqrt{\int_{-1}^{1} x^2 \cdot x^2\, dx}} = \sqrt{\frac{5}{2}}\, x^2}$$

P_3 باید ترکیب خطی x, x^2, x^3 باشد و بر P_1, P_2 عمود. قرار می‌دهیم: $P_3 = \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3$

$$\left.\begin{aligned} (P_1, P_3) &\propto (x, \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3) = \alpha \cdot \frac{2}{3} + \beta \cdot 0 + \gamma \cdot \frac{2}{5} = 0 \\ (P_2, P_3) &= (x^2, \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3) = \alpha \cdot 0 + \beta \cdot \frac{2}{5} + \gamma \cdot 0 = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} \beta &= 0 \\ \gamma &= -\frac{5}{3}\alpha \end{aligned}$$

برای مشخص کردن مقدار α، P_3 را بهنجار می‌کنیم:

$$\| \alpha x - \frac{5}{3}\alpha x^3 \| = |\alpha|^2 \int_{-1}^{1} (x - \frac{5}{3}x^3)^2 dx = |\alpha|^2 \cdot 2\left[\frac{1}{3} - 2 \cdot \frac{5}{3} \cdot \frac{1}{5} + \left(\frac{5}{3}\right)^2 \cdot \frac{1}{7}\right] = \frac{8|\alpha|^2}{63}$$

پس α را برابر با $\sqrt{\frac{63}{8}}$ انتخاب می‌کنیم و در نهایت داریم:

$$\boxed{P_3 = \sqrt{\frac{63}{8}} \left(x - \frac{5}{3}x^3\right)}$$

۵- برای پیدا کردن تابع وزن داریم: $\alpha = x, \ \beta = s+1-x, \ \gamma = 0$ پس

$$(w\alpha)' = w\beta \Rightarrow w\alpha = C \exp \int \frac{\beta}{\alpha} dx$$

این انتگرال ساده است:

$$\int \frac{s+1-x}{x} dx = (s+1)\log x - x \Rightarrow \exp \int \frac{\beta}{\alpha} = e^{-x} \cdot x^{s+1}$$

در نتیجه (با انتخاب $C=1$) $\boxed{w = x^s e^{-x}}$.

شرط دیگر عبارت است از $w\alpha (u_1^* u_2' - u_1'^* u_2)\Big|_a^b = 0$. اگر بخواهیم برای هر تابعی برقرار باشد باید $w\alpha$ در نقاط انتهایی $(x=a, x=b)$ صفر باشد یعنی $x^{s+1} e^{-x}\Big|_{a,b} = 0$. اما با توجه به اینکه $s>-1$ تنها دو نقطه وجود دارد که در آنها این عبارت صفر می‌شود $x = +\infty$ ، $x = 0$. پس $\boxed{[a,b] = [0, \infty)}$