

# امتحان پایان ترم ریاضی مهندسی

زمان: ۲ ساعت

توجه: معادلات باید با توضیح مناسب همراه باشند. پاسخ نهایی را داخل کادر مشخص کنید.

- ۱- در هر مورد اگر مجموعه داده شده یک فضای برداری است یک پایه برای آن بنویسید و اگر نیست دلیل آن را بیان کنید:  
(الف) مجموعه ماتریس‌های دوران در دو بعد (با عمل‌های جمع و ضرب معمولی ماتریس‌ها).  
(ب) مجموعه توابع متناوب روی بازه  $[a, b]$  به طوری که  $f(a) = f(b) = 1$  (با عمل‌های جمع و ضرب معمولی توابع).  
(پ) مجموعه جواب‌های حقیقی معادله دیفرانسیل  $y''(x) - y(x) = 0$  (با عمل‌های جمع و ضرب معمولی توابع).

۲- ماتریس

$$A = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 7 & -1 \\ -1 & 7 \end{pmatrix} \quad (1)$$

را در نظر بگیرید. وارون  $A$  را به دو روش زیر به دست آورید:  
(الف) ابتدا با تغییر پایه  $A$  را قطری کنید؛ سپس وارون را حساب کنید و در انتها دوباره به پایه اولیه بازگردید.  
(ب) از بسط

$$(I - B)^{-1} = I + B + B^2 + B^3 + \dots \quad (2)$$

استفاده کنید. ابتدا با تغییر پایه  $B = I - A$  را قطری کنید؛ سپس سری را جمع کرده و در انتها دوباره به پایه اولیه بازگردید.

۳- بسط فوریه تابع  $f(x) = x^2$  را در بازه  $[-1, 1]$  بنویسید و با استفاده از آن حاصل سری  $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^4$  را بیابید.

۴- دنباله  $x, x^2, x^3, \dots$  را در نظر بگیرید. با استفاده از روش گرام-اشمیت می‌توان از این دنباله مجموعه‌ای از توابع متعامد (با تابع وزن واحد) روی بازه  $[-1, 1]$  ساخت. سه عضو اول این مجموعه متعامد را پیدا کنید (نیازی نیست بهنجار کنید).

۵- معادله زیر را به فرم اشتورم-لیوویل بنویسید و تابع وزن مربوطه را بیابید:

$$xy''(x) - [x - (s + 1)]y'(x) + ny(x) = 0. \quad (3)$$

۱-  $s > -1$  یک پارامتر ثابت و  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  مقدار ویژه است. چه بازه‌ای برای جواب‌های این معادله باید اختیار کرد تا شرط مرزی برای همه توابع برقرار باشد؟

## روابط مورد نیاز

- نمایش ماتریسی عملگر  $A$  در پایه  $X$ :

$$Ax_i = a_{ji}x_i, \quad [A]_X = (a_{ij}). \quad (۴)$$

- نمایش بردار  $x$  در پایه  $X$ :

$$x = \alpha_i x_i, \quad [x]_X = (\alpha_i). \quad (۵)$$

- تغییر نمایش بردار  $x$  تحت تبدیل پایه  $X \rightarrow Y$ :

$$[x]_X = [S]_X [x]_Y, \quad y_i = Sx_i. \quad (۶)$$

- تغییر نمایش عملگر  $A$  تحت تبدیل پایه  $X \rightarrow Y$ :

$$[A]_Y = [S]_X^{-1} [A]_X [S]_X, \quad y_i = Sx_i. \quad (۷)$$

- دو خاصیت ضرب داخلی:

$$(x, y) = (y, x)^*, \quad (x, \alpha y) = \alpha(x, y). \quad (۸)$$

- نامساوی بسل: برای هر مجموعه متعامد بهنجار (orthonormal) مثل  $\{x_1, x_2, \dots\}$  داریم:  $\|x\|^2 \geq \sum_i |(x, x_i)|^2$ . وقتی این مجموعه کامل باشد نامساوی بسل به تساوی پارسوال تبدیل می شود.

- نامساوی شوارتز:  $|(x, y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|$ .

- عملگر الحاقی مربوط به  $A$ :  $(x, Ay) = (A^\dagger x, y)$ .

- عملگر خودالحاقی (هرمیتی):  $H = H^\dagger$ . عملگر یکانی:  $U^\dagger = U^{-1}$ . عملگر نرمال:  $[N, N^\dagger] = NN^\dagger - N^\dagger N = 0$ .

- تابع دلتای دیراک:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x) dx = f(0), \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} dk = 2\pi \delta(x). \quad (۹)$$

- پایه های متعامد بهنجار فوریه روی بازه  $[-L, L]$ :

$$\frac{1}{\sqrt{2L}} \exp\left(\frac{i\pi nx}{L}\right), \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (۱۰)$$

- تبدیل فوریه و وارون آن:

$$\tilde{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{ikx} dx, \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(k) e^{-ikx} dk. \quad (۱۱)$$

- معادله اشتورم-لیوویل:

$$\alpha(x)u''(x) + \beta(x)u'(x) + \gamma(x)u(x) = \lambda u(x), \quad (w\alpha)' = w\beta, \quad [w\alpha(u_1^* u_2' - u_1'^* u_2)]_a^b = 0. \quad (۱۲)$$