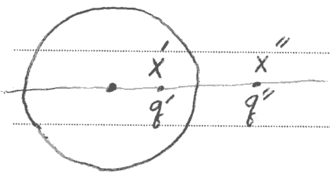
۱- برای پیدا کردن تابع گرین باید معادله $\nabla^2 G(x,x') = -4\pi\delta(x-x')$ را حل کنیم با این شرط مرزی که در روی کره به شعاع R است $G(x,x')$ صفر شود. یافتن چنین تابعی معادل پیدا کردن پتانسیل الکتریکی برای یک بار نقطه‌ای داخل کره‌ای رسانا است. برای حل این مسأله از روش بارهای تصویری کمک می‌گیریم:



$$\phi(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q'}{|x-x'|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q''}{|x-x''|}$$

چون ϕ روی سطح کره صفر است باید داشته باشیم

$$\frac{q'}{R} = -\frac{q''}{x''}, \qquad x'x'' = R^2$$

یعنی $\phi(x) = \frac{q'}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{|x-x'|} - \frac{R/x'}{|x-\frac{R^2}{x'^2}x'|}\right]$ با مقایسه $\nabla^2\phi = -\frac{q'\delta(x-x')}{\epsilon_0}$ و معادله گرین بدست می‌آوریم $q' = 4\pi\epsilon_0$ پس

$$\boxed{G(x,x') = \frac{1}{|x-x'|} - \frac{R}{|x'|}\frac{1}{\left|x-\left(\frac{R}{|x'|}\right)^2 x'\right|}}$$

۲- الف) میدان ماکروسکوپی است. اصولاً عبارت $D-P$ تفاضل دو کمیت میانگین گیری شده هموار است ولی نمی‌تواند برابر باشد با میدان میکروسکوپی که تابعی شدیداً ناهموار است.

ب) فرض شده ماده فقط از دوقطبی‌های الکتریکی و مغناطیسی ساخته شده است و اثرات چندقطبی‌های بالاتر از جمله در نظر گرفته نشده (مثلاً ۴-قطبی مولکول‌ها). فرض درباره خطی بودن، همگن و همسانگرد بودن و یا صفر بودن میدان‌های دوقطبی‌های مجاور نشده است.

۳- الف) از هیچکدام نمی‌توان استفاده کرد زیرا هم توزیع بار (ρ) و هم توزیع جریان (J) ایستا نیستند و وابسته به زمان اند.

ب) از هر دوی توان استفاده کرد " " " " هستند و مستقل از " "

ج) از هیچکدام نمی‌توان " " " " " نیستند و وابسته؟ " "

۴- چون در ناحیه $r < \frac{a}{2}$ جریانی وجود ندارد $\nabla\times B = 0$ پس تابعی نرده‌ای وجود دارد که گرادیانش میدان مغناطیسی را می‌دهد $B = \nabla\phi$. از طرفی $\nabla\cdot B = 0$ پس $\nabla^2\phi = 0$ و بنابراین ϕ ترکیبی خطی از $r^l P_l$ و $r^{-l-1}P_l$ است:

$$\phi = \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l P_l(\cos\theta) \Rightarrow B = \left[\hat{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\hat{\theta}}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right]\phi = \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^{l-1}\left[l\hat{r} + \hat{\theta}\frac{d}{d\theta}\right]P_l(\cos\theta)$$

چون ناحیه مورد علاقه شامل مبدأ است توان‌های منفی r را باید صفر بگذاریم

از مقایسه مؤلفه‌های $\hat{r}$ و $\hat{\theta}$ این عبارت با عبارت داده شده روی مرز $r = \frac{a}{2}$ و برابر گذاشتن ضرایب P_l داریم:

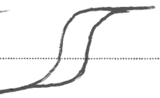
$$A_l\left(\frac{a}{2}\right)^{l-1} l = \frac{\mu_0 I}{a} C_n = \frac{\mu_0 I}{a}\frac{(-1)^n(2n+1)!!}{2^{3n+1} n!} \quad \text{برای } l = 2n+1$$

$$= 0 \quad \text{برای } l \text{ های زوج}$$

پس

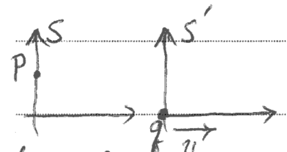
$$\boxed{B(r) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mu_0 I}{r}\frac{(-1)^n(2n+1)!!}{2^{n+1} n!}\left(\frac{r}{a}\right)^{2n+1}\underbrace{\frac{1}{2n+1}\left[(2n+1)\hat{r} + \hat{\theta}\frac{d}{d\theta}\right]}P_{2n+1}(\cos\theta)}$$

۵- گزینه [ب] صحیح است. مغناطش (M) با افزایش میدان خارجی نهایتاً به حد اشباع می‌رسد زیرا حداکثر مغناطش ممکن هر ماده در مغناطش زمانی است که تمام حوزه‌های آن هم‌جهت می‌شوند و M بالاتر از این حد ممکن نیست. بنابراین نمودار مربوط به گزینه «الف» باید مجانبی ثابت داشته باشد.



برعکس میدان مغناطیسی کران بالا ندارد و با افزایش H (یا میدان خارجی) می‌تواند دائماً زیاد شود و مجانب در مربوط به گزینه «ب» باید شیب داشته باشد که همان شکل داده شده است.

۶- طبق ... از معادله $\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} J^\nu$ نسبت به x^ν مشتق می‌گیریم و با توجه به پادمتقارن بودن F و جابجاپذیری ∂_μ و ∂_ν به دست می‌آوریم $\partial_\nu J^\nu = 0 = \partial_\mu \partial_\nu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c}\partial_\nu J^\nu$. صورت کلی ۴-دیورژانس J^μ معادل است با پایستگی بار (معادله پیوستگی).



۷- در دستگاه S' که مسأله الکترواستاتیک قابل حل است داریم: $E' = \frac{q}{r'^2}\hat{r}'$, $B' = 0$
نقطه مشاهده را روی محور y می‌گیریم (= محور را از نقطه مشاهده می‌گذرانیم) در ارتفاع b. ارتباط بین میدان‌های مشاهده شده در S, S' از تبدیل لورنتس $F^{\mu\nu} = A^\mu{}_\alpha A^\nu{}_\beta F'^{\alpha\beta}$ به دست می‌آید که معادل ماتریسی آن $F^{\mu\nu} = (AF'A^T)^{\mu\nu}$ است. پس:

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \gamma & +\gamma v/c & & \\ +\gamma v/c & \gamma & & 0 \\ & & 1 & 0 \\ 0 & & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -E_1' & -E_2' & 0 \\ E_1' & & & \\ E_2' & & 0 & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma & \gamma v/c & & 0 \\ \gamma v/c & \gamma & & \\ & & 1 & 0 \\ 0 & & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\gamma v}{c}E_1' & -\gamma E_1' & -\gamma E_2' & 0 \\ \gamma E_1' & -\gamma\frac{v}{c}E_1' & -\frac{\gamma v}{c}E_2' & 0 \\ E_2' & & & \\ 0 & & 0 & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma & \gamma v/c & & \\ \gamma v/c & \gamma & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -E_1' & -\gamma E_2' & 0 \\ E_1' & & & \\ \gamma E_2' & & 0 & \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$$

[دقت کنید چون تبدیل از S' به S را نوشته‌ام در ماتریس $A^\mu{}_\nu$ به جای v از -v استفاده کرده‌ام] بدین ترتیب از مقایسه ماتریس فوق با $F^{\mu\nu}$ به دست می‌آوریم:

$$E_1 = E_1', \quad E_2 = \gamma E_2', \quad E_3 = 0$$

تنها باید بین x', t' و t, x رابطه بنویسیم. می‌دانیم $t' = \gamma(t - \frac{v}{c}0)$, $r' = (-vt', b, 0)$ (زیرا برای P داریم $x=0$) پس:

$$E_1' = \frac{q\cdot(-v\gamma t)}{(b^2+v^2\gamma^2t^2)^{3/2}}, \quad E_2' = \frac{q\cdot b}{(b^2+v^2\gamma^2t^2)^{3/2}}$$

در نتیجه:

$$\boxed{E_1 = \frac{-q\gamma v t}{(b^2+\gamma^2v^2t^2)^{3/2}}, \quad E_2 = \frac{q\gamma b}{(b^2+\gamma^2v^2t^2)^{3/2}}}$$

۸- چون نسبت به A_μ در دستگاه مشتق می‌گیریم باید $\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial(\partial_\alpha A_\beta)}$ را محاسبه کنیم:

$$\frac{\partial}{\partial(\partial_\alpha A_\beta)}\left[\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu\right] = \delta^\alpha_\mu \delta^\beta_\nu - \delta^\alpha_\nu \delta^\beta_\mu$$

ضمناً چون فقط مشتقات A در F ظاهر می‌شوند پس $\partial F_{\mu\nu}/\partial A_\alpha = 0$. بنابراین معادله اویلر-لاگرانژ می‌شود

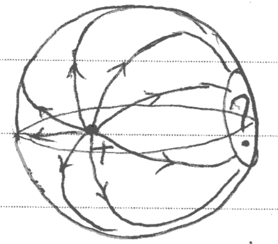
$$\partial_\alpha \frac{\partial\left[\frac{-1}{16\pi} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}\right]}{\partial(\partial_\alpha A_\beta)} = \frac{\partial\left[\frac{-1}{16\pi} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}\right]}{\partial A_\beta}$$

با استفاده از $\partial(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}) = 2F^{\mu\nu}\partial F_{\mu\nu}$ داریم:

$$\partial_\alpha\left[F^{\mu\nu}\left(\delta^\alpha_\mu \delta^\beta_\nu - \delta^\beta_\mu \delta^\alpha_\nu\right)\right] = 0 \Rightarrow \partial_\alpha\left[F^{\alpha\beta} - F^{\beta\alpha}\right] = 0 \Rightarrow \boxed{\partial_\alpha F^{\alpha\beta} = 0}$$

که از خاصیت پادتقارنی F استفاده شده. این نصف معادلات ماکسول است. نیم دیگر $\partial_\alpha \tilde{F}^{\alpha\beta}=0$ می‌باشد که از وردش کنش بدست نمی‌آید. اما چون برای هر F ای که به صورت $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ تعریف شده رابطه $\partial_\alpha \tilde{F}^{\alpha\beta}=0$ برقرار است نیازی هم به استخراج مجدد این بخش از معادلات نداریم.

۹ـ در فضای بیکران خطوط میدان خارج شده از یک بار تا بی‌نهایت گسترش می‌یابند و یا بر روی باری با علامت مخالف ختم می‌شوند. در S^3 (و با وجود تک بار) امکان گسترش خطوط تا بی‌نهایت نیست بنابراین اصلاً معادلات ماکسول برای تک بار نقطه‌ای جوابی ندارند.



در شکل روبرو مسأله را برای S^2 در نظر گرفته‌ام. همان طور که می‌بینید خطوطی که از بار خارج می‌شوند مجبورند در ناحیه "?" همدیگر را قطع کنند که طبق معادلات ماکسول مجاز نیست مگر اینکه آنجا بار نقطه‌ای منفی وجود داشته باشد.

به طور کلی روی S^3 باید بار کل صفر باشد و الا معادلات ماکسول جواب ندارند.