امتحان پایان ترم الکترودینامیک ۱

زمان: ۲:۳۰ ساعت

توجه: معادلات باید با توضیح مناسب همراه باشند. پاسخ نهایی را داخل کادر مشخص کنید.

۱ـ تابع گرین را برای مسأله دیریشله درون کره‌ای به شعاع R به دست آورید. [۱۰]

۲ـ الف) $\mathbf{E}$ در رابطه $\mathbf{D}=\epsilon_\circ \mathbf{E}+\mathbf{P}$ بیانگر چیست؟ میدان الکتریکی میکروسکوپی یا میدان الکتریکی ماکروسکوپی؟
ب) می‌دانیم معادلات ماکروسکوپی ماکسول برای میدان‌های ماکروسکوپی (میانگین‌گیری شده) نوشته شده‌اند. اما حتی برای همین میدان‌ها نیز دقیق نیستند و حوزه اعتبار محدودی دارند. در به دست آوردن آن‌ها چه فرضی به کار رفته است؟ [۱۰]

۳ـ در هر یک از موارد زیر مشخص کنید آیا می‌توان از قانون کولن

$$\mathbf{E}=\frac{۱}{۴\pi\epsilon_\circ}\int \frac{\rho(\mathbf{x}')\hat{\mathbf{r}}}{r^۲}d^۳x' \qquad (۱)$$

برای پیدا کردن میدان الکتریکی و از قانون بیوـساوار

$$\mathbf{B}=\frac{\mu_\circ}{۴\pi}\int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}')\times\hat{\mathbf{r}}}{r^۲}d^۳x' \qquad (۲)$$

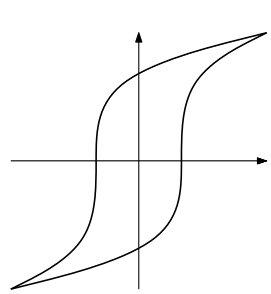
برای پیدا کردن میدان مغناطیسی استفاده کرد یا نه؟ توضیح دهید.
الف) بار الکتریکی نقطه‌ای که با سرعت ثابت حرکت می‌کند.
ب) کره بارداری که حول یکی از قطرهایش با سرعت زاویه‌ای ثابت می‌چرخد.
پ) کره بارداری که شعاعش با سرعت ثابت بزرگ می‌شود. [۵]

۴ـ جریان I از حلقه‌ای به مرکز مبدأ و به شعاع a واقع در صفحه xـy می‌گذرد. میدان مغناطیسی در فاصله $a/۲$ از مرکز حلقه با

$$\mathbf{B}=\frac{\mu_\circ I}{a}\sum_{n=\circ}^{\infty}\frac{(-۱)^n(۲n+۱)!!}{۲^{۳n+۱}n!}\left(\hat{\mathbf{r}}+\frac{۱}{۲n+۱}\hat{\boldsymbol{\theta}}\frac{d}{d\theta}\right)P_{۲n+۱}(\cos\theta) \qquad (۳)$$

داده می‌شود. میدان را در هر نقطه داخل کره $r=a/۲$ به دست آورید. [یادآوری: با وجود تقارن محوری جواب‌های معادله لاپلاس عبارت‌اند از ترکیب‌های خطی $r^lP_l(\cos\theta)$ و $r^{-(l+۱)}P_l(\cos\theta)$.] [۱۰]

۵ـ در منحنی پسماند داده شده کدام یک از گزینه‌ها محورهای افقی و عمودی را به درستی مشخص می‌کند؟ دلیل انتخاب خود را توضیح دهید. (B و H میدان کل درون ماده فرومغناطیس هستند، M مغناطش است، و B_{ext} میدان خارجی اعمال شده می‌باشد.)
الف) محور افقی: B_{ext}، محور عمودی: M
ب) محور افقی: H، محور عمودی: B [۵]



۶ـ اگر تک‌قطبی مغناطیسی وجود داشته باشد آیا باز هم بقای بار الکتریکی از معادلات ماکسول نتیجه می‌شود؟ اگر جوابتان مثبت است اثبات کنید و اگر نه یک مثال نقض بزنید. [۱۰]

۷ـ با استفاده از تبدیل لورنتس میدان الکتریکی بار نقطه‌ای q را که با سرعت ثابت $v\hat{\mathbf{x}}$ حرکت می‌کند به دست آورید. [۱۵]

۸ـ معادلات اویلرـلاگرانژ را برای کنش زیر به دست آورید. آیا همه معادلات ماکسول در خلأ از این راه به دست می‌آیند؟ (معادلات در دستگاه گاوسی نوشته شده‌اند.)

$$S = -\frac{۱}{۱۶\pi}\int d^۴x F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = \frac{۱}{۸\pi}\int d^۴x(E^۲ - B^۲) \quad (۴)$$

[۱۰]

۹ـ [امتیازی] آیا می‌توانید جوابی برای معادلات ماکسول بیابید که توصیف کننده میدان مربوط به یک بار الکتریکی نقطه‌ای در فضای $S^۳$ باشد؟ [در این مسأله فرض شده که فضا به جای $\mathbb{R}^۳$ که نامتناهی است، $S^۳$ (۳ـ کره) با شعاع محدود باشد به طوری که با حرکت در مسیر مستقیم پس از مدتی به نقطه ابتدایی برسیم. می‌توانید برای سادگی به جای ۳ بعد در ۲ بعد کار کنید؛ یعنی مسأله را برای $S^۲$ که سطح $x^۲ + y^۲ + z^۲ = a^۲$ می‌باشد حل کنید.] [۱۰]

روابط مورد نیاز

- معادلات ماکروسکوپی ماکسول :

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho, \qquad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \qquad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \qquad \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \tag{5}$$

- معادلات ماکسول و قانون نیروی لورنتس با حضور بار مغناطیسی:

$$\nabla\cdot\mathbf{E} = \rho_e/\epsilon_0, \qquad -\nabla\times\mathbf{E} = \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \mu_0 \mathbf{J}_m, \qquad \nabla\cdot\mathbf{B} = \mu_0 \rho_m, \qquad \nabla\times\mathbf{B} = \epsilon_0 \mu_0 \left[\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{J}_e/\epsilon_0\right]. \tag{6}$$

$$\mathbf{F} = q_e(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) + q_m(\mathbf{B} - \mathbf{v} \times \mathbf{E}). \tag{7}$$

(طبق قرارداد جکسون در همه معادلات فوق ρ_m، $\mathbf{J}_m$، و q_m باید یک ضریب اضافه $1/\mu_0$ داشته باشند.)

- متریک و ماتریس تبدیل لورنتس:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad A^{\mu}{}_{\nu} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma v/c & 0 & 0 \\ -\gamma v/c & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}. \tag{8}$$

- تانسور شدت میدان الکترومغناطیس: $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$:

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}, \qquad A^{\mu} = (\phi, \mathbf{A}). \tag{9}$$

- شکل تانسوری معادلات ماکسول و قانون نیروی لورنتس با حضور بار مغناطیسی (دستگاه گاوسی):

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} J_e^{\nu}, \qquad \partial_\mu \mathcal{F}^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} J_m^{\nu}, \qquad \mathcal{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma}. \tag{10}$$

$$F_\mu = \frac{q_e}{c} F_{\mu\nu} U_e^{\nu} + \frac{q_m}{c} \mathcal{F}_{\mu\nu} U_m^{\nu}. \tag{11}$$

که $\epsilon^{0123} = +1$ و $J^{\mu}_{e/m} = (\rho_{e/m}, \mathbf{J}_{e/m})$.

- گرادیان در مختصات کروی:

$$\nabla f = \hat{\mathbf{r}} \frac{\partial f}{\partial r} + \hat{\boldsymbol{\theta}} \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} + \hat{\boldsymbol{\phi}} \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial f}{\partial \phi}. \tag{12}$$

- معادله اویلرـلاگرانژ برای $\int f(\phi_i, \partial_\mu \phi_i) d^D x$:

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial f}{\partial(\partial_\mu \phi_i)} \right) = \frac{\partial f}{\partial \phi_i}. \tag{13}$$